Convergence d'une suite de variables aléatoires et Approximations

Exercice 1 (Tchebychev).

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$

$$\int_{\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \geqslant \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$$

Exercice 2 (Tchebychev).

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VAR deux à deux indépendantes.

1. On suppose que X_i suit une loi de Bernouilli de paramètre p_i.
   Démontrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$,
   $$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$
2. On suppose que les variables X_i suivent toutes la loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0,1[$.
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire : $Y_n = X_n + X_{n+1}$.
   (a) Déterminer la loi de Y_n et calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de p.
   (b) On note pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$T_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}$$
   Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.
   (c) Démontrer que la suite des v.a. (T_n) converge en probabilité vers la valeur $2p$.

Exercice 3 (Tchebychev).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VAR indépendantes de même loi, de fonction de répartition F, définies sur un même espace probabilisé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_{n,x}$ le nombre de variables $X_1, \ldots, X_n$ prennant une valeur inférieure ou égale à x. On pose

$$T_{n,x} = \frac{Z_{n,x}}{n}$$

1. Déterminer la loi de $Z_{n,x}$, son espérance et sa variance.
2. Déterminer un majorant de $V(Z_{n,x})$ indépendant de x.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\,|\, T_{n,x} - F(x)\,|\, \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Exercice 4 (Convergence en loi).

On considère la suite (X_n) de variables aléatoires. Pour un entier non nul n, la variable X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$ et on pose

$$Y_n = X_n - Ent(X_n)$$

Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable Y dont on précisera la loi.

Exercice 5 (Convergence en loi).

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On considère la variable aléatoire $Y = e^{-X}$

1. Montrer que la variable Y est une variable à densité et préciser sa loi. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. Pour un entier non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-x+\frac{1}{n}} & si \quad x \geqslant 0 \\ \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\left|f_n(x) - e^{-x}\right| \leqslant \frac{e}{n}$$

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Y_n = f_n(X)$.
Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers Y.

Exercice 6 (Convergence en loi - EDHEC 2013).

Soit $(X_n)_{n>1}$ une suite de VAR indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[0;1]$.
Pour $n > 1$ on définit :

$$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \qquad Y_n = n(1 - M_n) \qquad I_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$$

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis celle de Y_n.
2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable remarquable.
3. Montrer que la suite de variable (I_n) converge en loi vers la valeur constante 1.

Exercice 7 (TLC).

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables de Poisson indépendantes de paramètre 1.
On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que si X et Y sont deux variables indépendantes suivant respectivement les lois de Poission de paramètre λ_1 et λ_2 alors la variable $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.
2. Quelle est la loi de S_n ?
3. Exprimer $P(S_n \leqslant n)$ en fonction de n.
4. En utilisant le théorème de la limite centrée, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

Exercice 8.

Un lot de N pots de confiture contient 0,2% de pots avariés. On cherche à calculer la probabilité que, parmi 1000 pots, il y ait au plus 4 pots avariés ?
Pour cela on notera X la VAR aléatoire égale au nombre de pots avariés parmi 1000 pots, on reconnaitra une loi usuelle et on supposera N bien choisi pour pouvoir effectuer des approximations de loi.

Exercice 9.

Une entreprise fabrique des jouets électroniques. Après la fabrication de ces jouets, malgré des contrôles, $0,6\%$ des jouets restent défectueux : un jouet sortant de l'entreprise a ainsi la probabilité $0,006$ d'être défectueux.
On considère un lot de n jouets et parmi ceux-ci on appelle X_n le nombre de jouets défectueux.
1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_n ?
2. Pour $n = 500$, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X_n ?
3. En déduire, pour cette valeur de n, une approximation de la probabilité qu'il y ait au plus deux jouets défectueux.

Exercice 10.

Le nombre de clients entrant dans un magasin un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 10. Évaluer, à l'aide d'une approximation que l'on justifiera, la probabilité de ne pas tomber en dessous de 230 clients au cours d'une période de 24 jours ouvrés.

Exercice 11 (TLC - EML 2006)**.**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires indépendantes $Z_1, \ldots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p ($p \in]0;1[$). On pose de plus

$$M_n = \frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n}$$

1. Déterminer l'espérance m et l'écart type σ_n de M_n.
2. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n)$$

existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

Exercice 12.

Soit $X \sim \mathcal{B}in\left(9000\ ,\ \frac{1}{6}\right)$.
Évaluer

$$P(1400\ \leqslant\ X\ \leqslant\ 1600)$$

avec et sans correction de continuité puis avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 13.

1600 usagers de la SNCF cherchent à prendre chaque jour le train Rennes-Paris de 6h35. Les portes du train s'ouvrent une demi-heure avant le départ. Parmi les usagers, 50 arrivent avant l'ouverture, 80 arrivent trop tard. La SNCF envisage de faire appel à un bureau d'études afin d'améliorer la qualitédes prestations qu'elle fournit à ses clients.

1. En admettant que la distribution des temps d'arrivée est gaussienne, quelles sont les paramètres de la loi suivie par la variable aléatoire X "instant d'arrivée d'un usager par rapport à l'heure de départ du train" ?
2. A quelle heure les portes doivent-elles être ouvertes pour qu'il n'y ait pas plus de 1% d?usagers sur le quai ?
3. Combien de voyageurs manqueront le train malgré un départ retardé de 5 minutes ?

Exercice 14 (TCL - approximation loi binomiale).

Une compagnie aérienne fournit des réservations sur le vol d'un appareil de 500 places.
La probabilité qu'un passager ayant effectué la réservation pour ce vol ne se présente pas est de 10%.
Si la compagnie aérienne accorde 550 réservations sur ce vol, quel est le risque que certains passagers ne puissent pas prendre part dans l'avion en raison du manque de place ?

Exercice 15.

Les producteurs de champagne commercialisent leur produit en fonction de leur qualité : les champagnes "de luxe", vendus 40 euros la bouteille et les champagnes "du terroir".
Malgré tout le soin qu'ils apportent à leur production ainsi qu'à la commercialisation, il subsiste des erreurs d'étiquetage, et on admet qu'un acheteur de champagne "grand cru" aura une probabilité de 0.15 d'avoir en fait acheter une bouteille de champagne "du terroir".

1. Un restaurateur achète 200 bouteilles "grand cru". Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bouteille de champagne "du terroir" parmi les 200 bouteilles achetées.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ainsi que son espérance et sa variance.
   (b) Donner, en la justifiant, une approximation de la loi de X.
2. Calculer les probabilités $P(X > 20)$ et $P(20 < X < 35)$ en utilisant la correction de continuité.
3. Au fur et à mesure de la consommation des 200 bouteilles, le restaurateur a pu détecter chacune des bouteilles dites "du terroir". Il décide alors de ne payer que les bouteilles de qualité "grand cru" et de refuser de payer les bouteilles "du terroir".
   Calculer, sous cette hypothèse, la probabilité d'un bénéfice néanmoins positif pour le producteur sachant que chaque bouteille de champagne "du terroir" lui revient 12 euros et que chaque bouteille de type "grand cru" lui revient 30 euros.

Exercice 16 (TLC).

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $X_n(\Omega) = [-1; +\infty[\cap \mathbb{Z}$ et

$$\forall\, k \in X_n(\Omega) \quad P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{(k+1)!}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

1. Déterminer la loi de chaque variable $Y_j = X_j + 1$ puis celle de la variable S_n.
2. En utilisant, le théorème central limite, montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} P(S_n \leqslant 0) = \frac{1}{2}$$
3. ** En déduire, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t}\, t^n\, dt = \frac{1}{2}$$
   Indication : Exprimer $P(S_n \leqslant 0)$ sous forme de somme puis utiliser la formule de Taylor afin d'exprimer cette somme à l'aide d'une intégrale.

Exercice 17 (Exercice ESC 2006 voie S).

Le préliminaire n'est utilisé qu'en **2.e** et **2.f**.
Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. **Préliminaires**

   Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance $E(Y_n)$ et une variance $V(Y_n)$. On suppose en outre que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = m$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n) = 0$.
   (m étant une constante réelle).

   (a) Montrer que $E\left((Y_n - m)^2\right) = V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2$.

   (b) En déduire par inégalité de Markov que pour tout $\varepsilon > 0$,
   $$P(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2}{\varepsilon^2}$$

   (c) Montrer alors que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

   Dans la suite de cet exercice on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ de variables indépendantes et de même loi.
   Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n la variable aléatoire définie sur Ω par $M_n(\omega) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i(\omega)$. (M_n prend donc pour valeur la plus grande des valeurs prises par $X_1, X_2, ..., X_n$ et on remarque que $M_1 = X_1$).

2. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$.

   (a) Montrer que $(M_2 = 0) = ((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$ et en déduire la loi de M_2.

   (b) Montrer plus généralement que M_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^n$.

   (c) Soient r et s deux entiers tels que $1 \leqslant r \leqslant s$.

      i. Montrer que si $(M_r = 1)$ alors $(M_s = 1)$.

      ii. En déduire $E(M_r M_s) = 1 - q^r$, puis calculer la covariance $cov(M_r, M_s)$

   (d) Déduire du préliminaire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en probabilite vers la variable certaine égale à 1.

   (e) Montrer que $(n(1 - M_n))_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ sont des variables à densité indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$.

   (a) Rappeler la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$.

   (b) En déduire que pour tout réel x de $[0,1]$, $P(M_n \leqslant x) = x^n$.
   Montrer que M_n est une variable à densité.

   (c) Soit ε un réel de $]0,1]$. Calculer $P(|M_n - 1| \leqslant \varepsilon)$.

   (d) En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

   (e) Soit α un réel positif.

      i. Soit n un entier strictement supérieur à α.
      Montrer que : $P\left(n(1 - M_n) \leqslant \alpha\right) = 1 - \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$.

      ii. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^n = e^{-\alpha}$.

      iii. En déduire que $(n(1 - M_n))_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en loi vers une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 18 (EDHEC 2007 voie S).

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On admet que la variable S_n suit la loi Gamma $G(n,1)$ de densité :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ \dfrac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!} & si \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Donner l'espérance et la variance de S_n.
2. A l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}$.
3. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt$.

Exercice 19 (EDHEC 2012).

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1-p$.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes:
• Soit si l'on a obtenu"Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face"
On note T_n le nombre de lancers effectués.

1. Pour tout k de $[\![1;n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k=1$, la probabilité $P(T_n = k)$.
2. Déterminer $P(T_n = n)$.
3. Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$
4. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on précisera la loi.

Exercice 20 (EDHEC 2010).

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1.$$

Partie 1 : étude de f.

1. (a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés. En déduire que f est diagonalisable.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale tq : $M = PDP^{-1}$.
   (b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.
   (c) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de la manière suivante :

1.
   - Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{ème}$ tirage.
   - On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
   - Après le $k^{ème}$ tirage ($k \in \mathbf{N}^*$) :
     Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{ème}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{ème}$ tirage.
     Soit X_k a pris la valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{ème}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

2. Reconnaître la loi de X_1.

3. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{ème}$ ligne est $P(X_k = i)$.

   (a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

   (b) Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

   (c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbf{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$.

   (d) Vérifier que $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbf{N}$, on a :

   $$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$$

   (e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

   (f) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable a X dont on donnera la loi.

   (g) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

   (h) Écrire une fonction Pascal, notée `esp`, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.