BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

290

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Concepteur : ESSEC

ESSECMATE

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 11 mai, de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :
(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;
(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

I.1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

I.2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $\mathrm{M}+\alpha \mathrm{I}_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

I.3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

(a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

(b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

I.4. **(a)** Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

(b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

I.5. Montrer que la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

I.6. Pour tout t réel, on considère la matrice $\mathrm{M}(t)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $\mathrm{M}(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $\mathrm{M}(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

(b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $\mathrm{M}(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

II.1. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

II.2. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Montrer les inclusions $\mathrm{Ker}(u)\subset \mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}(u^2)\subset \mathrm{Ker}(u^3)$.

(b) Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

(c) Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

(d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

II.3. Soit (a,b,c,d,e,f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les réels $\gamma(\mathrm{M})=ac+df+be$ et $\delta(\mathrm{M})=bcf+ade$.

(a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)\,M + \delta(M)\,I_3$.

(b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

(c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

(d) En déduire que l'ensemble $\mathscr{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

(e) Exhiber une matrice de $\mathscr{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Problème 2. Le kurtosis

Introduction

On utilise dans tout ce problème les notations E(X) et V(X) pour désigner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.

On rappelle que pour tout entier naturel n, le moment centré d'ordre n de X, s'il existe, est défini par

$$\mu_n(X) = E\Big(\big[X - E(X)\big]^n\Big).$$

On dit qu'une variable aléatoire X admet un kurtosis lorsque
- X admet des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 ;
- $V(X) \neq 0$.

On appelle alors *kurtosis*, ou *coefficient d'applatissement* de X, le réel défini par :

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{\big(\mu_2(X)\big)^2} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{\big(V(X)\big)^2} - 3.$$

On admet le résultat suivant : une variable aléatoire X admet une variance nulle si, et seulement si, il existe un réel a tel que $P(X = a) = 1$. On dit dans ce cas que la loi de X est certaine.

Question préliminaire

Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis. Soient α et β deux réels, avec $\alpha \neq 0$.
Montrer que la variable aléatoire $\alpha X + \beta$ admet un kurtosis, et que l'on a :

$$K(\alpha X + \beta) = K(X).$$

Partie I. Des exemples

I.1. Loi uniforme
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

(a) Rappeler l'espérance de X et calculer sa variance.

(b) Calculer le kurtosis de X.

(c) En utilisant le préliminaire, déterminer le kurtosis pour une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec a et b réels et $a < b$).

I.2. Loi normale
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

(a) Montrer que X admet un moment centré d'ordre n pour tout entier naturel n.

(b) Pour tout entier naturel n, établir la relation : $\mu_{n+2}(X) = (n+1)\mu_n(X)$.

(c) Montrer que le kurtosis de X est nul.

(d) Que vaut le kurtosis pour une loi normale de paramètres quelconques ?

I.3. Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

(a) Calculer le kurtosis de X en fonction de p.

(b) Montrer que K(X) est minimum pour $p = \frac{1}{2}$ et déterminer la valeur minimale.

Partie II. Minoration du kurtosis

II.1. Soit Y une variable aléatoire admettant une variance. Montrer : $E(Y^2) \geqslant E(Y)^2$.

II.2. Montrer que le kurtosis d'une variable aléatoire, s'il est défini, est toujours supérieur ou égal à -2.

II.3. Soient a et b deux réels distincts. On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{a, b\}$, autrement dit que $P(X = a) = P(X = b) = \frac{1}{2}$. Vérifier que $K(X) = -2$.

II.4. On se propose de montrer la réciproque de ce résultat. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis égal à -2.

(a) Montrer que la variable $\left(X - E(X)\right)^2$ suit une loi certaine.

(b) En déduire que $P(X = x)$ est non nulle uniquement pour deux valeurs réelles de x que l'on notera a et b.

(c) Montrer que X suit la loi uniforme sur $\{a, b\}$.

II.5. Existe-t-il une majoration du kurtosis, c'est-à-dire un réel M tel que $K(X) \leqslant M$ pour toute variable aléatoire X admettant un kurtosis ?

Partie III. Somme de variables

III.1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant un kurtosis. Montrer : $E\left((X+Y)^4\right) = E(X^4) + 6V(X)V(Y) + E(Y^4)$.

III.2. Établir la formule : $K(X+Y) = \dfrac{V(X)^2 K(X) + V(Y)^2 K(Y)}{[V(X)+V(Y)]^2}$.

III.3. Montrer que cette formule est encore valable pour des variables X et Y indépendantes mais non nécessairement centrées.

III.4. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune admettant un kurtosis, alors

$$K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2 K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^2}.$$

III.5. Soient X une variable aléatoire admettant un kurtosis, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Établir : $\lim_{n\to+\infty} K(S_n) = 0$.

(b) Interpréter ce résultat, en commençant par rappeler l'énoncé du théorème de la limite centrée.