CALCUL MATRICIEL

1 Définitions et Notations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à n lignes et m colonnes tout tableau de la forme suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

où les $a_{i,j}$ (pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$) sont des nombres réels.
On peut également noter de facon plus compacte cette matrice sous la forme $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n\,;\,1 \leqslant j \leqslant m}$.
Les nombres $\{a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$ sont les **coefficients de la matrice** A.
Le nombre $a_{i,j}$ est le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de A.
L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes et à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{\mathbf{n,m}}(\mathbb{R})$
Les réels n et m sont les **dimensions** de la matrice A.

☛ **Cas n=m :**
Dans le cas ou le nombre de lignes est égal au nombre de colonne, on parle de **matrice carré** de dimension n.
On note l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $a_{i,j} = 0$ dès que $i > j$, alors on parle de matrice **triangulaire supérieure**.
Si $a_{i,j} = 0$ dès que $i < j$, alors on parle de matrice **triangulaire inférieure**.
Si $a_{i,j} = 0$ dèq que $i \neq j$ alors on parle de **matrice diagonale**.

☛ **Cas n=1 :** Dans le cas d'une matrice à une seule ligne, on parle de **matrice ligne**. L'ensemble des matrices lignes à m colonnes est noté : $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})$.

☛ **Cas m=1 :** Dans le cas d'une matrice à une seule colonne, on parle de **matrice colonne**. L'ensemble des matrices colonne à n lignes est noté : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

IMPORTANT : Une n-liste, élément de $\mathbb{R}^n$ peut être identifiée à une matrice ligne ou bien une matrice colonne à n éléments.

☛ On appelle **matrice nulle** la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,m}$.

Exercice 1.
1/ Expliciter les matrices

$$A = \left((-1)^{i+j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant 3\,;\,1 \leqslant j \leqslant 3} \qquad B = (i+j)_{1 \leqslant i \leqslant 2\,;\,1 \leqslant j \leqslant 3} \qquad C = (\min(i,j))_{1 \leqslant i \leqslant 3\,;\,1 \leqslant j \leqslant 4}$$

2/ Trouver une écriture compacte de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \\ -1 & -3 & - & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \end{pmatrix}$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Définition.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On note λA, le produit de A par le réel λ, la matrice à n lignes et m colonnes définie par :

$$\lambda A = (a'_{i,j}) \qquad \text{avec} \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}\,,\ \ j \in \{1, \dots, m\}\,, \quad a'_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Autrement dit on multiplie tous les coefficients de la matrice par ce réel.

Exemple : $2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$.

Propriétés - Régles de calcul
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors :

① $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu(\lambda A)$ ② $\lambda 0_{n,m} = 0_{n,m}$ ③ $0A = 0_{n,m}$ $1A = A$.

2.2 Addition de deux matrices

Définition.
Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On note $\lambda A + B$, somme des matrices A et B , la matrice à n lignes et m colonnes définie par :

$$A + B = (c_{i,j}) \qquad \text{avec} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, m\},\quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Autrement dit on ajoute entre eux les termes de A et de B situés aux mêmes places.

Les matrices A et B doivent avoir les mêmes dimensions pour être ajoutées.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -8 & 11 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Définition - Opposée d'une matrice et soustraction de matrice
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ alors :
- on appelle opposée de la matrice A, la matrice $(-1)A$, notée $-A$.
- la matrice $A + (-B)$ est plus simplement écrit $A - B$.

Propriétés - Régles de calcul
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors :
❶ $A + B = B + A$.
❷ $(A + B) + C = A + (B + C)$.
❸ $A + 0_{n,m} = A$.
❹ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ en particulier : $-(A + B) = -A - B$.
❺ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ en particulier : $A - A = A + (-A) = 0_{n,m}$.

2.3 Multiplication de deux matrices

Définition.
Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. On note $\lambda A \times B = AB$, produit des matrices A et B , la matrice à n lignes et p colonnes définie par :

$$AB = (d_{i,j}) \qquad \text{avec} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, p\},\quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\cdot \times b_{k,j}$$

Le produit de A par B n'a de sens que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B.
En ce sens il se peut que AB ait un sens alors que BA n'en ait pas!!
On verra que même lorsque AB et BA ont un sens (cas $n = m = p$) alors on a généralement $AB \neq BA$!!! Ce qui s'exprime ainsi

$$\boxed{\text{La multiplication de matrice n'est pas commutative !!}}$$

Remarque - vocabulaire :
☛ Lorsque A et B sont deux matrices telles que AB et BA soient bien définies et que $AB = BA$ alors on dit que les matrices A et B commutent.
☛ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On distingue ainsi la multiplication de A à gauche par B qui donne le produit BA et la multiplication de A à droite par B qui donne le produit AB.

Propriétés - Régles de calcul
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

❶ $\forall\, C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R}), \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$

❷ $\forall\, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$

❸ $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B).$

Exercice 2. Calculer les produit suivant

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition - Propriété.
On appelle matrice unité de taille n, noté I_n, la matrice carré suivante

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$:

$$AI_m = A \qquad\qquad I_nA = A$$

2.4 Puissance d'une matrice carré

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carré de taille n.
On pose $A^0 = I_n$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}$$

Propriétés - Régles de calcul avec les puissances
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p, q \in \mathbb{N}$ alors :

❶ $A^p \times A^q = A^{p+q}$ ❷ $(A^p)^q = (A^q)^p = A^{pq}.$

Attention, contrairement aux règles de puissances des réels, on a généralement :

$$(AB)^p \neq A^pB^p$$

Exercice 3.
1/ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. 2/ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3/ Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer C^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.
1/ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent c.a.d. que $AB = BA$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^nB^n = (AB)^n = B^nA^n$$

2/ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2B^2 et $(AB)^2$. A-t-on $AB = BA$?

Exercice 5.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1/ Montrer que $(A - 3I_2)(A - 4I_2) = 0$.
2/ Définir les suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = a_nA + b_nI_2$$

3/ Exprimer A^n en fonction de n.

2.5 Transposée d'une matrice

Définition.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On appelle matrice transposée (ou plus directement transposée) de A, la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.
Ainsi si on note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\ ;\ 1\leqslant j\leqslant m}$ et ${}^tA = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m\ ;\ 1\leqslant j\leqslant n}$ on a

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \forall j \in [\![1,n]\!] \qquad b_{i,j} = a_{j,i}$$

Exemples : Ecrire les matrices transposée des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^tB = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Propriétés - Régles de calcul
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

❶ ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ ❷ ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.

❸ ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$ ❹ ${}^t({}^tA) = A$.

3 Matrices et systèmes linéaires

Lien entre calcul matriciel et résolution d'un système linéaire Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

alors résoudre le système linéaire

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m & = & b_2 & (L_2) \\ \vdots & = & \vdots & \\ \vdots & = & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array} \right.$$

revient à déterminer la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$AX = B$$

☛ Ainsi les matrices fournissent une notation compacte pour l'écriture des systèmes linéaires puisque tout système liéaire peut s'ecrire sous la forme : $AX = B$ où A et B sont des matrices données et X une matrice colonne inconnue.

Définition - Notation.
Etant donné le système linéaire (S), la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\ ;\ 1\leqslant j\leqslant m}$ est appelée la **matrice du système** (S).

Exercice 6. Ecrire les systèmes suivants dans leur écriture matricielle

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ -x + y - z & = & 5 \end{array} \right. \qquad (S_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & 1 \\ x + y & = & -1 \\ y + t & = & 5 \\ z - 2t & = & 0 \end{array} \right. \qquad (S_3) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -x - y - z - t & = & 0 \\ x + y - z + 2t & = & 0 \\ -2x + 3z - 2t & = & 0 \\ z + 4t & = & -2 \end{array} \right.$$

4 Matrice carrée inversible

Dans toute cette section les matrices considérées seront des matrices carrées.

Définition.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Exercice 7. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Indication : on pourra penser à utiliser la matrice $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $5A^3 + A^2 - 3A = I_n$. Justifier que A est inversible.

Proposition - Définition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
Si A est **inversible** alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Cette matrice se note alors A^{-1} et est appelée l'inverse de A.
L'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$ se note $GL_n(\mathbb{R})$.

✍ Contrairement à tout réel non nul x qui admet un inverse, une matrice carré n'est pas toujours inversible!!! De plus, si une matrice A est inversible on n'utilise jamais la notation $\frac{1}{A}$ pour décrire l'inverse de A.

Exercice 9.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ est elle inversible? Si oui, déterminer A^{-1}.
La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est elle inversible? Si oui, déterminer B^{-1}.
La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est elle inversible? Si oui, déterminer C^{-1}.
La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est elle inversible? Si oui, déterminer D^{-1}.

`Première méthode de calcul de l'inverse (inspirée directement de la définition):`

`Chercher si il existe` $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ `vérifiant` $AB = BA = I_2$

`ou chercher si il existe` $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & v & w \end{pmatrix}$ `vérifiant` $AB = BA = I_3$

Proposition - Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors :

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff ad - bc \neq 0$$

Dans le cas où $ad - bc \neq 0$, on a de plus $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Propriétés.

❶ Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et de plus : $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

❷ La matrice identité $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ mais la matrice nulle $0_n \notin GL_n(\mathbb{R})$.

❸ Si $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ alors AB est inversible, cad $AB \in GL_n(\mathbb{R})$, et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

❹ Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$ alors $A^p \in GL_n(\mathbb{R})$, et

$$(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$$

❺ Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors pour toutes matrices $B, C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

$$AB = AC \iff B = C$$

❻ Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors pour toutes matrices $B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

$$BA = CA \iff B = C$$

ATTENTION : SI $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, on a pas nécéssairement $A + B \in Gl_n(\mathbb{R})$!!!!

Exemple : $A = I_n$ et $B = -I_n$ alors $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ mais $A + B = 0_n \notin GL_n(\mathbb{R})$

Exercice 10.
Soient $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

Exercice 11.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est

$$A^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

Exercice 12.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a/ Trouver deux réels a et b tels que $A^2 + aA + b_2 = 0_2$.

b/ En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4.1 Lien entre l'inversibilité d'une matrice et la résolution de systèmes linéaires

Théorème - Lien entre système de CRAMER et matrice inversible
Quelque soit $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire de n équations à n inconnues

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_n & = & b_1 & \qquad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_n & = & b_2 & \qquad (L_2) \\ \vdots & = & \vdots & \\ \vdots & = & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_n & = & b_n & \qquad (L_n) \end{array} \right.$$

est de CRAMER si et seulement si la matrice du système $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n\,;\,1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

Exercice 13.
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles ou pas.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.
Déterminer si les systèmes linéaires ci-dessous sont des systèmes de CRAMER ou pas.

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & -1 \\ -2x - y & = & 3 \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} 11x + 10y & = & 26 \\ x + y & = & 9 \end{array} \right. \qquad (S_4) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4y + 2z & = & -1 \\ -y - z & = & 0 \\ 2z & = & -4 \end{array} \right.$$

Conséquence - résolution "matricielle" d'un système de CRAMER
Soient $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Le système linéaire de la forme

$$AX = B$$

a une unique solution, donnée par

$$X = A^{-1}B$$

Théorème - Calcul de l'inverse d'une matrice carrée.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,;\,1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit (S) le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right. \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

où b_1, b_2, $\ldots$, b_n sont des constantes quelconques. Alors :

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \text{la résolution de } (S) \text{ par la méthode de GAUSS fait apparaître } n \text{ pivots non nuls}$$

Dans ce cas, si quelque soit les valeurs b_1, b_2, $\ldots$, b_n, l'unique solution du système est $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définis par

$$(*) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & c_{1,1}b_1 + c_{1,2}b_2 + \ldots + c_{1,n}b_n \\ x_2 & = & c_{2,1}b_1 + c_{2,2}b_2 + \ldots + c_{2,n}b_n \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n & = & c_{n,1}b_1 + c_{n,2}b_2 + \ldots + c_{n,n}b_n \end{array}\right.$$

alors $A^{-1} = (c_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,;\,1\leqslant j\leqslant n}$

Exercice 15.
Reprendre l'Exercice 13. ci-dessus et donner l'inverse des matrices A, B, C et D lorsqu'il existe...
Reprendre l'Exercice 14. ci-dessus et déterminer par la méthode matricielle (lorsque ces systèmes sont de CRAMER) les solutions des systèmes (S_1), (S_2) et (S_3).

`Deuxième méthode de calcul de l'inverse (inspirée de la résolution de systèmes linéaires)`

`Si` $A \in GL_n(\mathbb{R})$ `alors tout système` $AX = B$ `est de CRAMER.`

`Résoudre un sytème de la forme` $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ `puis exprimer la solution` $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ `en fonction des valeurs` b_1, b_2, ..., b_n `sous la forme` $(*)$.

Exercice 16.
Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible ou pas. Si elle l'est, calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Algorithme de GAUSS-JORDAN

4.2.1 Opérations élémentaires sur les matrices

Comme cela a été fait pour les systèmes linéaires, on peut définir des opérations élémentaires les lignes (ou colonnes) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'on va voir que ces opérations élémentaires peuvent se caractériser à l'aide de multiplications matricielles.
Il va donc être possible de :

a) permuter les lignes d'une matrice.
b) subsituer à une ligne d'une matrice A, le produit de cette ligne par un réel <u>non nul</u>.
c) subsituer à une ligne d'une matrice A, la somme d'elle-même et d'un multiple d'une autre ligne de A.

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,m}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,m}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,m}\end{pmatrix}$$

✷ Permuter la ligne L_i et la ligne L_j de la matrice A revient à multiplier A à gauche par

$$M_{i,j}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
 & \ddots & & & & & & & & \\
0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & & \vdots & 1 & & \vdots & & & \vdots\\
\vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & 0\\
0 & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

> ➠ Ainsi la matrice déduite de A par échange des lignes L_i et L_j est $A' = M_{i,j}\times A$.
> ➠ Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et $j\in[\![1;m]\!]$, la matrice $M_{i,j}$ est inversible.

✷ Substituer à la ligne L_i, la ligne λL_i ($\lambda\neq 0$) de la matrice A revient à multiplier A à gauche par

$$N_i(\lambda)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots\\
0 & \dots & \dots & \ddots & \lambda & \ddots & \dots & \dots & 0\\
\vdots & & & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

> ➠ Ainsi la matrice déduite de A par multiplication de la ligne L_i par le réel λ est $A'' = N_i(\lambda)\times A$.
> ➠ Pour tout $i\in[\![1;n]\!]$ et $\lambda\in\mathbb{R}^*$, la matrice $N_i(\lambda)$ est inversible.

✷ Substituer à la ligne L_i, la ligne $L_i+\mu L_j$ ($j\neq i$ et $\mu\in\mathbb{R}$) de la matrice A revient à multiplier A à gauche par

$$K_{i,j}(\mu)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & & & & & \\
0 & \dots & 1 & \dots & \mu & \dots & 0\\
\vdots & & & \ddots & \vdots & & \\
\vdots & & & & 1 & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

> ➠ Ainsi la matrice déduite de A par multiplication de la ligne L_i par le réel μ est $A''' = K_{i,j}(\mu)\times A$.
> ➠ Pour tout $i,j\in[\![1;n]\!]$, $i\neq j$, et $\mu\in\mathbb{R}$, la matrice $K_{i,j}(\mu)$ est inversible.

Remarque :
Nous n'en aurons pas besoin dans ce qui suit, mais les opérations similaires peuvent s'effectuer sur les colonnes de la matrice A en multipliant A à droite par les matrices ci-dessus.

> **Définition.**
> Les matrices $M_{i,j}$, $N_i(\lambda)$, ($\lambda\neq 0$) et $K_{i,j}(\mu)$, avec $i\neq j$ et $\mu\in\mathbb{R}$ sont appelés matrices d'opérations élementaires.
> Toutes ces matrices sont inversibles!!!

4.2.2 Interprétation matricielle de la méthode de GAUSS.

Soient la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,;\,1\leqslant j\leqslant m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et le système linéaire

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m & = & b_2 & (L_2) \\ \vdots & = & \vdots & \\ \vdots & = & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array} \right.$$

Nous avons vu dans la méthode de GAUSS, qu'à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes du système linéaire (S), il était possible d'obtenir un système triangulaire (S'), équivalent à (S).
En notant A' la matrice (également triangulaire) du système (S'), l'on peut alors écrire que A' se déduit de A à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes : il existe p matrices d'opérations élémentaires M_1, M_2, ..., M_p telles que

$$A' = M_p M_{p-1} \ldots M_1 A$$

Matriciellement cela implique que :

$$AX = B \iff M_p M_{p-1} \ldots M_1 AX = M_p M_{p-1} \ldots M_1 B \iff A'X = M_p M_{p-1} \ldots M_1 B$$

☛ En pratique, mieux vaut utiliser cette méthode sur le système plutot que sur la matrice A car le calcul $M_p M_{p-1} \ldots M_1 B$ est rapidement complexe!!!

4.2.3 Algorithme de GAUSS-JORDAN : Calcul de l'inverse d'une matrice carrée A.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Principe

Supposons que l'on puisse trouver un nombre fini d'opérations élémentaire sur les lignes de A, transformant A en la matrice identité I_n. Matriciellement cela équivaut à l'existence de p matrices d'opérations élémentaires, M_1, M_2, ..., M_p telles que :

$$M_p M_{p-1} \ldots M_2 M_1 A = I_n \qquad (*)$$

Les matrices M_1, ..., M_p étant toutes inversibles, la matrice

$$M = M_p M_{p-1} \ldots M_2 M_1$$

est elle aussi inversible et l'égalité $(*)$ ci-dessus prouve que A est inversible et que

$$A^{-1} = M_p M_{p-1} \ldots M_2 M_1$$

Afin d'obtenir directement la matrice inverse $A^{-1} = M = M_p M_{p-1} \ldots M_2 M_1$, il suffit d'observer que

$$A^{-1} = M_p M_{p-1} \ldots M_2 M_1 I_n$$

✌ Ainsi, A^{-1} est la matrice obtenue en effectuant les mêmes opérations élémentaires que sur A, sur la matrice identité I_n.

`Troisième méthode de calcul de l'inverse`
`(inspirée du lien entre opérations sur les lignes d'une matriceet multiplication matricielle)`

`Utiliser l'algorithme de GAUSS9-JORDAN.`

Mise en pratique

On effectue en parallèle des opérations élémentaires sur les lignes de A et de I_n afin de transformer A en I_n. Le principe de transformation de A en I_n (si $A \in GL_n(\mathbb{R})$) est décomposé ci-dessous.

Etape 1 :
Utiliser des opérations sur les lignes afin de "triangulariser" la matrice A (fc. méthode GAUSS). A l'issue de ces opérations la matrice A est transformé en une matrice du type :

$$A' = \begin{pmatrix} c_1 & * & * & \lambda_1 \\ 0 & c_2 & * & \lambda_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & c_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est inversible **si et seulement si** les pivots de Gauss, c_1, c_2, ..., c_n sont tous non nuls.
Si ce n'est pas le cas, A n'est pas inversible, l'algorithme est s'arrête.
Si $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $\dots c_n \neq 0$, la matrice A est inversible, l'algorithme se poursuit.

Etape 2 :
En particulier $c_n \neq 0$, il est donc possible de le remplacer par 1 en divisant la n-ème ligne par c_n : $L_n \leftarrow \frac{1}{c_n} L_n$
On obtient alors la matrice :

$$A'' = \begin{pmatrix} c_1 & * & * & \lambda_1 \\ 0 & c_2 & * & \lambda_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 3.
On annule les coefficients sur la dernier colonne (hormis le 1 sur la dernière ligne) à l'aide des opérations

$$L_i \leftarrow L_i - \lambda_i L_n \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

On obtient alors la matrice

$$A''' = \begin{pmatrix} c_1 & * & * & * & 0 \\ 0 & c_2 & * & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & c_{n-1} & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etapes suivantes :
Le coefficient c_{n-1} étant non nul, il est possible de le remplacer par 1 en divisant la $(n-1)$-ème ligne par c_{n-1}, c'est à dire en procédant par : $L_{n-1} \leftarrow \frac{1}{c_{n-1}} L_{n-1}$. On obtient alors :

$$A'''' = \begin{pmatrix} c_1 & * & * & \mu_1 & 0 \\ 0 & c_2 & * & \mu_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On annule alors les coefficients de la $(n-1)$-ème colonne (hormis le 1 sur la diagonale) à l'aide des opérations

$$L_i \leftarrow L_i - \mu_i L_{n-1} \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant n-2$$

On remonte ainsi en annulant tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale jusqu'à obtenir la matrice identité I_n.

Proposition.
Si à la fin de l'**étape 1** de l'algorithme de GAUSS-JORDAN, la matrice triangulaire obtenue admet "au moins" un 0 sur la diagonale alors la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 17.
Déterminer, à l'aide de l'algortithme de GAUSS-JORDAN, si les matrices suivantes sont inversibles. Calculer éventuellement leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$