ANALYSE - CONTINUITE d'une FONCTION

1 Définition

Définition - Continuité en un point
1/ On dit que f est continue en x_0 si
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$
2/ On dit que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 si la restriction de f à $]-\infty, x_0] \cap D_f$ (resp. à $[x_0, +\infty[\cap D_f$) est continue en x_0.
Autrement dit, si
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \qquad \text{(resp.} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0))$$

Propriété

$$f \quad \text{est continue en} \quad x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{est continue à droite et à gauche en} \quad x_0$$

Exercice : Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$. La fonction f est-elle continue en 0?

Définition - Continuité sur un intervalle.
On dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exemples types (à utiliser dans des justifications):
- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonction fractions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- la fonction racine $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
- la fonction valeur absolue $x \to |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle $\exp : x \to e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme népérien : $\ln : x \to \ln x$ est continue sur $]0; +\infty[$.

2 Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

2.1 Propriétés.

1. **Somme et produit de fonctions continues**
Soient f et g deux fonctions définies sur I, partie de $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

SI f et g sont continues sur I **ALORS** les fonctions $f+g$; $f \times g$ et λf sont également continues sur I

2. **Quotient de fonctions continues**
Soient f et g deux fonctions définies sur I telles que g ne s'annule pas sur I.

SI f et g sont continues sur I **ALORS** la fonction $\frac{f}{g}$ est également continue sur I

3. **Composée de fonctions continues**
Soient f une fonctions définie sur I et g une fonction définie sur J telles que $f(I) \subset J$.

SI f st continue sur I et g continue sur J **ALORS** la fonction $g \circ f$ est continue sur I

Exemples :
1. La fonction $f : x \to x^2 + \frac{1}{x}$ est définie et continue sur R^*.
En effet $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction $x \to e^{x+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée des fonctions $h : x \to x+1$ continue sur $\mathbb{R}$ et $w : x \to e^x$ continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $h(\mathbb{R})$.

2.2 Limite de suites et continuité

Propriété.
Si

$$\left\{\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente vers un réel } l\in\mathbb{R} \\ \\ f \text{ est une fonction continue en } l \end{array}\right.$$

alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$.

Exemples :
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convegente vers 2 alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_n^2 - 4$ converge vers $2^2 - 4 = 0$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convegente vers 0 alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = e^{-u_n}$ converge vers 1.

☛ Cette propriété est notamment utilisée pour l'étude de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

3 Fonctions continues par morceaux

Définition - Fonction continue par morceaux
On dit qu'une fonction f est **continue par morceaux** sur $[a;b]$:
si f est continue sur $[a;b]$ sauf peut être en un nombre fini ou infini dénombrable (= que l'on peut compter) de points en lesquels elle possède des limites finies à gauche et droite (pas nécessairement égales).

☛ Graphiquement ces éventuels points de discontinuité se caractérisent par un "saut" de la courbe représentant la fonction f.

Exemple type :
La fonction partie entière $x \to Ent(x)$ est continue par morceaux!! Elle est même constante par morceaux.
Déterminer un autre exemple de fonction continue par morceaux : ....
....

4 Prolongement par continuité d'une fonction

Proposition - Définition : Fonction prolongeable par continuité
Soit f une fonction définie sur $I\backslash\{x_0\}$, non définie en x_0.
Supposons que f soit continue sur $I\backslash\{x_0\}$ et que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad (l\in\mathbb{R})$ alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \left\{\begin{array}{lll} f(x) & si & x\in I\backslash\{x_0\} \\ \\ l & si & x = x_0 \end{array}\right.$$

est continue sur I.
C'est le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple :
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

La fonction f est définie sur $D_f =]-1,0[\cup]0\,;+\infty[$.
De plus f est continue sur D_f en tant que produit (ou quotient) de fonctions continues sur D_f.
Cependant, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ainsi il est possible de prolonger par continuité f sur $]-1;+\infty[$ en définissant la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{\ln(1+x)}{x} & si & x\in]-1,0[\cup]0\,;+\infty[\\ \\ 1 & si & x = 0 \end{array}\right.$$

Exercice.
Soit la fonction $f : x \to e^{\frac{x-1}{x^2}}$.
1/ Déterminer D_f. Justifer que f est continue sur D_f.
2/ Peut-on prolonger f par continuité? Si oui, en quel(s) point(s)? Justifier.

5 Théorème des valeurs intermédiaires

Rappel : Définition mathématiques d'un intervalle réel.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\textbf{quelque soient } a, b \in A \textbf{ avec } a < b \quad : \quad \underline{\textbf{si}}\ c \in \mathbb{R} \textbf{ tel que } a \leqslant c \leqslant b\ \underline{\textbf{alors}}\ c \in A$$

Autrement dit si tous les réels compris entre deux éléments de I sont également dans I.

Les différents types d'intervalle réel sont :

. . . .
. . . .

Théorème - T(héorème) V(aleurs) I(ntermédiaires)

L'image d'un intervalle par une fonction <u>continue</u> est un intervalle.

Autrement dit :
❶ **SI** f est continue sur $[a, b]$ et si par exemple $f(a) \leqslant f(b)$
ALORS $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ ainsi pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = y$.

$\Longrightarrow$ f prend au moins une fois toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ incluses

`Autrement dit si la fonction` $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ `est continue sur` $[a, b]$`, tout` $y \in [f(a), f(b)]$ `admet au moins un antécédent dans` $[a, b]$ `par` f`...` `mais pas nécéssairement un unique antécédent dans` $[a, b]$`.`

❷ **SI** f est continue sur $]a, b[$ (donc a et b peuvent être infinis),
ALORS pour tout $y \in]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$ (ou $]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)[$)
il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = y$.

Exemples d'applications.
1. La fonction

$$f_1 : x \to \sqrt{x-4} - 3$$

est définie et continue sur $[4\ ;\ +\infty[$
Appliquons le T.V.I. à f_1 sur l'intervalle $[4; +\infty[$.
La fonction f_1 sst continue sur $[4\ ;\ +\infty[$. On a $f_1(4) = -3$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.
Ainsi, le théorème nous assure que tout $y \in [-3; +\infty[$ admet (au moins) un antécédent dans $[4; +\infty[$ par f_1.
Autrement dit pout tout $y \in [-3; +\infty[$, l'équation

$$\sqrt{x-4} - 3 = y$$

admet (au moins) une solution dans l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$.

2. La fonction

$$f_2 : x \to \frac{2}{x} - e^x$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle!!!).
Appliquons le T.V.I. à f_2 sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
La fonction f_2 sst continue sur $]0\ ;\ +\infty[$. On a $\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = -\infty$.
Ainsi, le théorème nous assure que tout $y \in]-\infty; +\infty[$ admet (au moins) un antécédent dans $]0; +\infty[$ par f_2.
Autrement dit pout tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation

$$\frac{2}{x} - e^x = y$$

admet (au moins) une solution dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

ATTENTION : Il n'y a pas nécéssairement <u>unicité</u> de x vérifiant $f(x) = y$!!!
Ainsi il peut exister $y \in [f(a), f(b)]$ pour lesquels l'équation

$$f(x) = y$$

admet plusieurs solutions dans $[a, b]$.

Contre-exemple :

La fonction f : $\begin{array}{ccc} [-1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 \end{array}$ est continue sur $[-1,2]$ et $f(-1)=1$ et $f(2)=4$.
Ainsi le TVI affirme que quelque soit $y \in [1,4]$ il existe au moins une valeur $x \in [-1,2]$ telle que $f(x)=y$.
....
....

`Ce théorème est essentiel pour justifier l'existence de solution d'une équation de type` $f(x)=\alpha$ `avec` $\alpha \in \mathbb{R}$ `réel donné.`

Exemple : L'équation $xe^x = 1$ admet (au moins) une solution dans l'intervalle $[0,1]$
En effet :
- l'application $f : x \to xe^x$ est continue sur $[0,1]$ en tant que produit des fonctions $x \to x$ et $x \to e^x$ toutes deux continues sur $[0,1]$.
- de plus $f(0)=0$ et $f(1)=e \approx 2,7182$.
- par application du TVI à f sur $[0,1]$, pour tout $y \in [0,e]$ il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x)=y$.
  En particulier, puisque $1 \in [0,e]$ l'équation $f(x)=1$ admet (au moins) une solution sur $[0,1]$.

Corollaire.
SI f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$, **ALORS** ....

De plus, **SI** f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$, **ALORS** ....

Exemple (cf. DM 4): Soit $n \geqslant 2$, existence de solutions de $\frac{e^{-x}}{n} + x - n = 0$
Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{n} + x - n$
- La fonction f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- Après étude de ses variations, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\ln(n)$	$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		$1-n-\ln(n)$	

- Appliquons le TVI à f_n sur $]-\infty, -\ln n]$.

On a $f_n(-\ln n) = 1-n-\ln n < 0$ (car $n \geqslant 2$) et $\lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Puisque $0 \in [1-n-\ln n\ ;\ +\infty[$, on déduit que l'équation $f_n(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-\infty, -\ln n[$.
- Appliquons le TVI à f_n sur $[-\ln n; +\infty[$.

On a $f_n(-\ln n) = 1-n-\ln n < 0$ (car $n \geqslant 2$) et $\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Puisque $0 \in [1-n-\ln n\ ;\ +\infty[$, on déduit que l'équation $f_n(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-\ln n; +\infty[$.

6 Théorème de la bijection (conséquence directe du TVI)

Théorème
SI f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I,
ALORS :
(i) la fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$,
(ii) la fonction réciproque

$$f^{-1} \ : \ f(I) \to I$$

est continue sur $f(I)$ et strictement monotone, de même sens de variation que f, sur l'intervalle $f(I)$.

`Ce théorème affine le résultat du TVI dans le cas où la fonction` f `est continue et strictement croissante ou stricement décroissante sur` I.
`Pour tout` $y \in [f(a), f(b)]$, `il assure l'existence ET l'unicité dans` $[a,b]$ `d'une solution à l'équation :` $f(x) = y$

Exemple : Montrer qu'une fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$
La fonction ln : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante et vérifie : $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
Sa réciproque est la fonction exponentielle $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \to & e^x \end{array}$, est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

`Ce théorème est essentiel pour jusitfier qu'une application réalise une bijection de` I `sur` J.

Corollaire.
SI f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$, **ALORS** ....

De plus, **SI** f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$, **ALORS** ....
....

Exemples : Montrer qu'une solution $f(x) = a$ (où a est donné) admet une unique solution dans un certains intervalle
Montrer que l'équation

$$\sqrt{x-4} - 3 = 0$$

admet une unique solution dans l'intervalle $[4; 20]$.
La fonction $f_1 : x \to \sqrt{x-4} - 3$ est continue sur l'intervalle $[4 \ ; \ 20]$. De plus pour tout $x \in [4; 20]$,

$$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} \quad > \quad 0$$

Ainsi f_1 est strictement croissante sur l'intervalle $[4; 20]$.
De plus $f_1(4) = -3$ et $f_1(20) = \sqrt{20-4} - 3 = \sqrt{16} - 3 = 4 - 3 = 1$. Ainsi, le théorème de la bijection assure que f_1 réalise une bijection de $[4; 20]$ sur l'intervalle $[-3; 1]$.
Puisque $0 \in [-3; 1]$, on déduit que 0 admet un unique antécédent par f_1 dans $[4; 20]$. Autrement dit, on déduit que l'équation

$$f_1(x) = 0$$

admet une unique solution, notée c, dans $[4; 20]$.

☛ On peut utiliser le théorème de la bijection afin de localiser plus précisément la solution c de cette équation. Par exemple, en considérant $[4; 18]$. La fonction f_1 est continue et strictement croissante sur $[4; 18]$ et $f_1(4) = -3$ et $f_1(18) = \sqrt{14} - 3 > 0$. Donc la solution $c \in [4; 18]$.

`On va s'attarder sur un algorithme "simple" permettant de localiser à une précision désirée l'unique solution d'une équation sur un intervalle.`

7 Recherche de solution d'une équation par dichotomie

☞ *le mot "dichotomie" est emprunté du grec : dikha ≈ "en deux" ; tomia ≈ "coupure, incision".*

Objectif :
Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.
Le corollaire ci-dessus, nous assure qu'il existe (au moins) un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
Nous cherchons à déterminer une valeur approchée de c. Autrement dit à localiser de manière plus précise une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Principe :
• **Etape 1 :** La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle $I = [a,b]$ en deux intervalle de même taille en considérant $c_1 = \frac{a+b}{2}$, centre de l'intervalle I. Deux alternatives se présentent :

(i) soit $f(a)f(c_1) \leqslant 0$ (ii) soit $f(b)f(c_1) \leqslant 0$.

Si le cas (i) se présente alors par application du corollaire ci-dessus à f sur $[a,c_1]$, il existe (au moins) une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur $[a,c_1]$. On note alors l'intervalle $I_1 = [a,c_1]$.
Si le cas (ii) se présente alors par application du corollaire ci-dessus à f sur $[c_1,b]$, il existe (au moins) une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur $[c_1,b]$. On note l'intervalle $I_1 = [c_1,b]$.
A la fin de cette étape, on a localisé une solution de $f(x) = 0$ dans un intervalle I_1 de diamètre $|I_1|$ deux fois plus petit que celui de I :

$$|I_1| = \frac{|I|}{2} = \frac{b-a}{2}$$

• **Etape 2 :** On répète ce principe en utilisant c_2 milieu de l'intervalle I_1, afin de déterminer l'intervalle I_2 contenant une solution de $f(x) = 0$ et de diamètre $|I_2|$ deux fois plus petit que celui de I_1 :

$$|I_2| = \frac{|I_1|}{2} = \frac{|I|}{4} = \frac{b-a}{4}$$

• On répète ce procédé jusqu'a avoir localisé une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans un intervalle de diamètre suffisament petit (vis à vis de la précision réclamée!!)

Remarque : A la fin de l'étape n, on a constuit un intervalle I_n contenant (au moins) une solution de $f(x) = 0$ et tel que

$$|I_n| = \frac{|I|}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$$

Critique de cette méthode :
les "+" : **vaste champs d'application ; simplicité de mise en oeuvre (programmation)**
Cette méthode ne requiert que très peu de condition sur la fonction f, uniquement la continuité de celle-ci sur $[a,b]$ et le fait de pouvoir déterminer le signe de $f(c_1)$, $f(c_2)$,. . . etc.
De plus, par sa simplicité cette algorithme est relativement facile à programmer.
les "-" : **efficacité médiocre**.
la précision de cette méthode est relativement médiocre en comparaison à des méthodes itératives basées sur des outils poussés : type méthode de Newton qui obtient une précision à l'itération n de l'ordre de $|b-a|^{2^n}$.