Devoir surveillé n° 6 - CORRECTION

Vous êtes invités à soigner la présentation de votre copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes et concises de vos affirmations.

Exercice 1 - sujet concours 1995

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On note f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Afin de déterminer les valeurs propres de la matrice A , nous allons chercher les valeurs de λ telles que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible. Utilisons pour cela l'algorithme de Gauss.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2-\lambda \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 5-\lambda & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 \\ 0 & 3-\lambda & P(\lambda) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow 2L_2 - (5-\lambda)L_1 \end{array}$$

avec $P(\lambda) = -2 - (2-\lambda)(5-\lambda) = -2 - (10 - 7\lambda + \lambda^2) = -\lambda^2 + 7\lambda - 12$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$$

avec

$$Q(\lambda) = P(\lambda) - (\lambda - 3) = -\lambda^2 + 7\lambda - 12 - \lambda + 3 \;=\; -\lambda^2 + 6\lambda - 9 = -(\lambda-3)^2$$

Ccl : Les valeurs propres de A sont les valeurs de λ telles que :

$$3 - \lambda = 0 \qquad \text{OU} \qquad -(\lambda-3)^2 = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{la seule valeur propre de } A \text{ est la valeur } 3}$.

2. La valeur 0 n'étant valeur propre de A, la matrice A est inversible.

3. La matrice A ne possédant qu'une seule valeur propre 3, si A devait être diagonalisable alors il existerait une matrice inversible P telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \;=\; P3I_3P{-}1 = 3I_3$$

Ccl : Or étant donné que $A\ neq 3I_3$, cett hypothèse doit être rejetée et ainsi $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

4. On pose la matrice $B = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ où $I_3 =$.

   (a) On observe que $B^2 = 0_3$. Il vient alors que pour tout entier $n \geqslant 2$, $B^n = 0_3$. La matrice B est nilpotente d'ordre 2.

(b) Soit un entier $n \geqslant 2$. Etant donné que $A = B + 3I_3$ et que les matrices B et $3I_3$ commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n &= (B+3I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (3I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} B^k (3I_3)^{n-k} \\ &= (3I_3)^n + n3^{n-1} B I_3^{n-1} = 3^n I_3 + 3^{n-1} B = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n + 2n3^{n-1} & -n3^{n-1} & -n3^{n-1} \\ 2n3^{n-1} & 3^n - n3^{n-1} & -n3^{n-1} \\ 2n3^{n-1} & -n3^{n-1} & 3^n - n3^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. On définit les vecteurs $u = (1,2,0)$ et $v = (1,1,1)$.

(a) On observe que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi $\boxed{f(u) = 3u}$. De même, on a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ainsi $\boxed{f(v) = 3v}$.

(b) Si une telle valeur a existe alors, d'après la dernière colonne de la matrice T, le vecteur $w = (1,1,a)$ est tel que $f(w) = 3w + v$ ce qui signifie que :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autrement dit a est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4-a &=& 4 \\ 4-a &=& 4 \\ 1+2a &=& 3a+1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ a &=& 0 \\ -a &=& 0 \end{array} \right. \iff a = 0$$

Ainsi la seule valeur possible pour a est $a = 0$.

Vérifions désormais que dans ce cas la famille (u, v, w) forme bien une base de $\mathbb{R}^3$ en s'assurant que cette famille est libre. En effet, si $au + bv + cw = (0,0,0)$ alors

$$a(1,2,0) + b(1,1,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ 2a+b+c &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 0 \\ 2a+c &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ 2a+c &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ c &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array} \right.$$

<u>Ccl</u> : Lorsque $\boxed{a = 0}$, la famille $(u, v, (1,1,0))$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice est T car d'après ce qui précède $f(u) = 3u$, $f(v) = 3v$ et

$$f((1,1,0)) = 3(1,1,0) + v$$

(c) D'après la formule de changement de base, on a $A = PTP^{-1}$ avec P, matrice de changement de base de la base canonique vers la base $(u, v, (1,1,0))$, soit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. On définit alors l'application φ par : pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = AM + MA$$

(a) L'application φ transforme bien une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en une matrice $AM + MA$ appartenant elle aussi à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, si M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et λ est un réel quelconque, on observe que :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A = A\lambda M + AN + \lambda MA + NA \\ &= \lambda(AM + MA) + AN + NA \\ &= \lambda\varphi(M) + \varphi(N) \end{aligned}$$

<u>Ccl</u> : L'application φ est donc bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $M' = P^{-1}MP$. On a alors $M = PM'P^{-1}$ et puisque $A = PTP^{-1}$, il vient que :

$$\begin{aligned} \varphi(M) = 0_3 &\iff AM + MA = 0_3 \iff PTP^{-1}PM'P^{-1} + PM'P^{-1}PTP^{-1} = 0_3 \\ &\iff PTM'P^{-1} + PM'TP^{-1} = 0_3 \\ &\iff P^{-1}\left(PTM'P^{-1} + PM'TP^{-1}\right)P = P^{-1}0_3P \\ &\iff P^{-1}PTM'P^{-1}P + P^{-1}PM'TP^{-1}P = 0_3 \\ &\iff TM' + M'T = 0_3 \end{aligned}$$

<u>Ccl</u> : Ainsi, rechercher les matrices M dans le noyau de φ se ramène à rechercher les matrices M' telles que $TM' + M'T = 0_3$.

(c) Soit $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $TM' + M'T = 0_3$ alors

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3a & 3b & b+3c \\ 3d & 3e & e+3f \\ 3g & 3h & h+3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 6a & = & 0 \\ 6b & = & 0 \\ b+6c & = & 0 \\ 6d+g & = & 0 \\ h+6e & = & 0 \\ 6f+e+i & = & 0 \\ 6g & = & 0 \\ 6h & = & 0 \\ 6i+h & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \\ i & = & 0 \\ d & = & 0 \\ e & = & 0 \\ f & = & 0 \end{array}\right.$$

<u>Ccl</u> : $\boxed{\text{La seule matrice } M' \text{ vérifiant } M'T + TM' = 0_3 \text{ est la matrice nulle } 0_3.}$

(d) D'après ce qui précède, si $M \in Ker(\varphi)$ alors $M' = P^{-1}MP$ est telle que $M'T + TM' = 0_3$ donc $M' = 0_3$ ce qui entraine que $P^{-1}MP = 0_3$ et ainsi que $M = 0_3$. Ceci démontre que le noyau de l'endomorphisme φ est réduit à l'élément neutre :

$$Ker(\varphi) = \{0_3\}$$

<u>Ccl</u> :Cela implique (conséquence du théroème du rang) que φ est injective et surjective donc bijective. Ainsi, nous venons de justifier que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(e) En utilisant une méthode analogue à celle nous ayant permis d'étudier $Ker(\varphi)$, nous pouvons étudier $Ker(\varphi - \lambda \cdot id)$ lorsque λ est un paramètre réel.
En effet, le réel λ est valeur propre de φ si seulement si $Ker(\varphi - \lambda id) \neq \{0_3\}$. Ainsi, nous allons chercher les valeurs de λ pour lesquelles il existe des matrices **non nulles** M, telles que :

$$AM + MA = \lambda M$$

Or si $M' = P^{-1}MP$ alors

$$AM + MA = \lambda M \iff TM' + M'T = \lambda M'$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notons $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $TM' + M'T = \lambda M'$ alors

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} 3a & 3b & b+3c \\ 3d & 3e & e+3f \\ 3g & 3h & h+3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} (6-\lambda)a & = & 0 \\ (6-\lambda)b & = & 0 \\ b+(6-\lambda)c & = & 0 \\ (6-\lambda)d+g & = & 0 \\ h+(6-\lambda)e & = & 0 \\ (6-\lambda)f+e+i & = & 0 \\ (6-\lambda)g & = & 0 \\ (6-\lambda)h & = & 0 \\ (6-\lambda)i+h & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 6}$ alors $6-\lambda \neq 0$ et ainsi

$$TM' + M'T = \lambda M' \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \\ i & = & 0 \\ d & = & 0 \\ e & = & 0 \\ f & = & 0 \end{array} \right. \iff M' = 0_3$$

Donc la seule matrice vérifiant $\varphi(M) = \lambda M$ est la matrice nulle.

$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 6}$ alors

$$TM' + M'T = \lambda M' \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \\ e+i & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi par exemple la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $TM' + M'T = 6M'$ et alors la matrice $M = PM'P^{-1}$ est non nulle et vérifie $\varphi(M) = 6M$.

<u>Ccl</u> : **La seule valeur propre de l'endomorphisme φ est la valeur 6.**

Exercice 2 - d'après EDHEC 2010

On considère les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x^3} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ \dfrac{e^{x-1}}{2} & \text{si} \quad x < 1 \end{array} \right. \qquad G(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} x < 0 & \\ \sqrt{ax} & \text{si} & x \in [0,2] \\ 1 & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$$

1. (a) La fonction f est continue sur $]-\infty;1[$ en tant que composée des fonctions $x \to x-1$ et $u \to \dfrac{1}{2}e^u$; et sur $]1;+\infty[$ en tant que quotients de fonctions continues sur cet intervalle. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, la fonction f est également positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
Enfin, on observe que :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2}e^{t-1}\,dt \;+\; \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{t-1}}{2}\right]_a^1 \;+\; \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^b \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^{a-1}}{2} - \frac{1}{2}\right) \;+\; \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

ccl : $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc bien une densité de probabilité.}}$

(b) Afin que la fonction G soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit continue au point 2 et ainsi que :

$$\lim_{x\to 2^-} G(x) = \lim_{x\to 2^+} G(x) = G(2)$$

Or $\lim_{x\to 2^-} G(x) = G(2) = \sqrt{2a}$ et $\lim_{x\to 2^+} G(x) = 1$. Ainsi, le réel a est tel que :

$$\sqrt{2a} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2a = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{1}{2}$$

On observe alors que la fonction G est également continue en tout point de $]-\infty;0[$, de $]0,2[$ et de $]2,+\infty[$ en tant que fonction constante ou composée de fonctions continues. De plus, on remarque également que G est continue en 0 car :

$$\lim_{x\to 0^-} G(x) = 0 = G(0) \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x}{2}} = 0 = G(0)$$

Ccl : $\boxed{\text{Lorsque } a = \frac{1}{2}, \text{ la fonction } G \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

2. On considère des variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que :
   - la variable X admet f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X ;
   - la variable Y a pour fonction de répartition la fonction G.

(a) Le support de la variable X est $\mathbb{R}$.
Si $x < 1$ alors $]-\infty;x] \subset]-\infty,1]$ et ainsi

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t-1}\,dt = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{t-1}\right]_a^x \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{x-1} - \frac{1}{2}e^{a-1}\right]_a^1 = \frac{e^{x-1}}{2}
\end{aligned}$$

Si $x \geqslant 1$ alors $]-\infty;x] =]-\infty,1] \cup [1,x]$ et ainsi

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2}e^{t-1}\,dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3}\,dt \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{t-1}\right]_a^1 + \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{a-1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2x^2}
\end{aligned}$$

Ccl : La fonction de répartition de la variable X est donc définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}}{2} & si \quad x < 1 \\[2ex] 1 - \dfrac{1}{2x^2} & si \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

(b) On a $P(X \leqslant 1) = F_X(1) = 1 - \dfrac{1}{2 \times 1^2} = \dfrac{1}{2}$ et $P(Y \leqslant 1) = G(1) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Or puisque $\sqrt{2} < 2$, il vient que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{2}$ et ainsi que

$$P(Y \leqslant 1) > P(X \geqslant 1)$$

(c) Nous avons vu que lorsque$a = \dfrac{1}{2}$, la fonction G, qui est la fonction de répartition de la variable Y, est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. De plus, cette fonction est également de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ en tant que fonction constante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$ et en tant que composée de fonctions de classe C^1 sur $]0, 2[$.
Ccl : Nous déduisons donc que la variable Y est variable continue. Une densité de Y est alors une fonction g telle que $g(t) = G'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ soit (par exemple) :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2t}} & si \quad t \in]0, 2[\\ \\ 0 & si \quad t \notin]0, 2[\end{cases}$$

3. La variable Y possède une espérance et une variance si et seulement si les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\, dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)\, dt$ sont toutes deux absolument convergentes. Or, on remarque que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| g(t)\, dt = \int_0^2 t \times \frac{1}{2\sqrt{2t}}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |t^2| g(t)\, dt = \int_0^2 t^2 \times \frac{1}{2\sqrt{2t}}\, dt$$

Les fonctions $t \to t \times \dfrac{1}{2\sqrt{2t}}$ et $t \to t^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2t}}$ sont toutes deux continues sur $]0, 2]$ et prolongeables par continuité en 0. Il vient donc que ces deux intégrales sont convergentes et ainsi que Y possède une espérance et une variance.

On a alors

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\, dt = \int_0^2 t \times \frac{1}{2\sqrt{2t}}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^2 \sqrt{t}\, dt \\ E(Y) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t}\right]_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{2}{3} \times \left(2\sqrt{2} - 0\right) \\ E(Y) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g(t)\, dt = \int_0^2 t^2 \times \frac{1}{2\sqrt{2t}}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^2 t\sqrt{t}\, dt \\ E(Y^2) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{2}{5} t^2\sqrt{t}\right]_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{2}{5} \times \left(2^2\sqrt{2} - 0\right) \\ E(Y^2) &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Et ainsi

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{4}{5} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{5} - \frac{4}{9} = \frac{36 - 20}{45} = \frac{16}{45}$$

Ccl : On conclut ainsi que $\boxed{E(X) = \dfrac{2}{3}}$ et $\boxed{V(Y) = \dfrac{16}{45}}$.

4. (a) Soit un réel $a < 1$, nous cherchons à calculer l'intégrale :

$$\int_a^1 x e^{x-1}\, dx$$

Appliquons la formule d'intégration par partie avec

$$u(x) = x \qquad v'(x) = e^{x-1}$$

et ainsi

$$u'(x) = 1 \qquad\qquad v(x) = e^{x-1}$$

Les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[a,1]$, il vient que :

$$\begin{aligned}\int_a^1 xe^{x-1}\,dx &= \left[xe^{x-1}\right]_a^1 - \int_a^1 e^{x-1}\,dx\\ &= ae^{a-1} - 1\times e^{1-1} - \left[e^{x-1}\right]_a^1 = ae^{a-1} - 1 - \left(e^{a-1} - e^{1-1}\right)\\ &= ae^{a-1} - 1 - e^{a-1} + 1 = ae^{a-1} - e^{a-1}\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\int_{-\infty}^1 xe^{x-1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 xe^{x-1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(ae^{a-1} - e^{a-1}\right) = 0$$

car d'après les croissances comparées $\lim_{U\to-\infty} Ue^U = 0$.

Ccl : On a donc bien démontré que $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{1} xe^{x-1}\,dx = 0}$

(b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)\,dt$ est convergente.

Or

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)\,dt &= \int\limits_{-\infty}^{0}(-t)f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{+\infty} tf(t)\,dt\\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} xe^{x-1}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\end{aligned}$$

Le calcul de la question précédente permet de justifier que l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{x-1}\,dx$ est impropre en $-\infty$ mais convergente. De plus, l'intégrale $\int\limits_{0}^{1} xe^{x-1}\,dx$ n'est pas une intégrale impropre car $x \to xe^{x-1}$ est cotinue sur l'intervalle $[0,1]$. Enfin, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente. Ces remarques permettent de conclure à la convergence de l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)$ et ainsi à l'existence de l'espérance de la variable X.

On a ainsi :

$$\begin{aligned}E(X) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{1} xe^{x-1}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}\times 0 + \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right) = 1\end{aligned}$$

Ccl : La variable aléatoire X possède une espérance et $\boxed{E(X) = 1}$.

5. On pose $Z = \sqrt{Y}$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Z sa fonction de répartition.

(a) Etant donné que $Y(\Omega) = [0,2]$, nous déduisons que $\boxed{Z(\Omega) = [0,\sqrt{2}]}$. En effet si $x \in [0,2]$ alors $\sqrt{x} \in [0,\sqrt{2}]$.

(b) Dès lors que $Z(\omega) = [0,\sqrt{2}]$, nous savons que :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x < 0\\ \\ 1 \quad si \quad x > \sqrt{2}\end{cases}$$

Si $x \in [0, \sqrt{2}]$, on a :

$$F_Z(X) = P(Z \leqslant x) \;=\; P(\sqrt{Y} \leqslant x) \;=\; P(Y \leqslant x^2) = F_Y(x^2) = G(x^2)$$

Or puisque $x^2 \in [0,2]$ lorsque $x \in [0, \sqrt{2}]$, on déduit que :

$$F_Z(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2}} \;=\; \frac{x}{\sqrt{2}}$$

<u>Ccl</u> : Ainsi, on obtient que :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{2}} & si \quad x \in [0, \sqrt{2} \\ 1 & si \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$$

(c) On remarque que la fonction de répartition de la variable Z correspond à la fonction de répartition de la loi uniforme sur l'intervalle $[0; \sqrt{2}]$. Ainsi, la variable Z suit la loi uniforme sur $[0; \sqrt{2}]$.

(d) D'après les formules du cours, on obtient que

$$E(Z) = \frac{\sqrt{2}+0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$V(Z) = \frac{(\sqrt{2}-0)^2}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

<u>Ccl</u> : On a $\boxed{E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ et $\boxed{V(Z) = \frac{1}{6}}$.

6. **Simulation informatique de la loi de Y.**

(a) Si U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ alors la variable $V = 2U^2$ a pour support l'ensemble $[0,2]$ car pour si $u \in [0,1]$ alors $u^2 \in [0,1]$ et ainsi $2u^2 \in [0,2]$.
Pour tout réel $x \in [0,2]$, on a

$$F_V(x) \;=\; P(V \leqslant x) \;=\; P(2U^2 \leqslant x) \;=\; P\left(U^2 \leqslant \frac{x}{2}\right) \;=\; P\left(U \leqslant \sqrt{\frac{x}{2}}\right) \;=\; F_U\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$$

Or étant donné que $x \in [0,2]$, alors $\frac{x}{2} \in [0,1]$ et $\sqrt{\frac{x}{2}} \in [0,1]$. Puisque pour tout $t \in [0,1]$, $F_U(t) = t$, il vient que :

$$F_V(x) \;=\; \sqrt{\frac{x}{2}} = G(x) = F_Y(x)$$

<u>Ccl</u> : Les fonctions de répartition des variables V et Y coincidant sur $[0,2]$ comme en dehors de cet intervalle, il vient que Z et Y suivent la même loi de probabilité.

(b)
```
n=input("entrer le nombre de simulations à effectuer")
u = grand( 1 , n , "unf", 0 , 1 )
y = 2*u.^2
disp( mean(y) )
histplot(y,10)
```

Exercice 3 - 3 pts

Partie A.

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.
On considère l'application g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g\,(x) = x^2 + \ln x$$

1. Montrer que l'équation $g\,(x) = 0$, d'inconnue $x \in\,]0;+\infty[$, admet une solution et une seule.
Dans la suite de l'exercice, on note α l'unique solution de cette équation.

2. Montrer que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

Partie B.

On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = x\ e^y + y\ \ln x$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction F admet comme unique point critique le point de coordonnées $(\alpha, \ln(\alpha))$.

3. La fonction F admet elle un extremum local au point $(\alpha, \ln(\alpha))$?

Exercice 4 - 6pts

On désigne par n un entier naturel non nul et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = nx - e^{-x}$$

1. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f'_n.

   (b) Etudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}$ et justifier que l'équation

   $$f_n(x) = 0$$

   d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution unique, notée u_n.

   (c) Justifier que pour tout entier naturel non nul

   $$0 < u_n < \frac{1}{n}$$

   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la valeur 0.

   (e) Justifier l'égalité $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$, puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   On considère maintenant et dans toute la suite deux fonctions notées g et h définies par :

   $$\begin{aligned} g(x,y) &= 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2 \\ h(x) &= 2e^{-x} + 2x^2 \end{aligned}$$

2. (a) Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.

   (c) Montrer que le seul point critique de g est le point $M = (u_2, u_2)$ où le réel u_2 est l'unique solution de l'équation $2x - e^{-x} = 0$, vue au 1.(b).

   (d) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de g.

   (e) Montrer que g présente en M un minimum local et déterminer sa valeur en fonction de u_2.

3. (a) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) \geqslant h(x)$

   (b) Etudier les variations de h et montrer que h présente en $x = u_2$ un minimum global.

   (c) En déduire que le minimum local présenté en M est aussi un minimum global pour g.

Exercice 5 - d'après HEC 2000 voie T

1. **cours**

2. On suppose que la durée d'utilisation, en années, d'un pneu de vélo neuf, avant qu'il ne crève, est une variable aléatoire, notée X, suivant la loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

   (a) Pour tout réel $t > 0$,

   $$P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - F_X(t) = 1 - \left(1 - e^{-at}\right)\ =\ e^{-at}$$

(b) Soit t et s, deux réels strictement positifs.
Sachant qu*'au bout de t années d'utilisation, le pneu n'a pas crevé, la probabilité qu'il ne crève pas au cours des s années suivantes* correspond à la probabilité conditionnelle : $\boxed{P_{(X>t)}(X > t+s)}$.
Or

$$P_{(X>t)}(X > t+s) = \frac{P((X>t)\cap(X>t+s)}{P(X>t)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \frac{e^{-a(t+s)}}{e^{-at}} = e^{-a(t+s)+at} = e^{-as}$$

☛ On remarque notamment que cette probabilité est égale à $P(X > s)$!! **La loi exponentielle est dite loi sans vieillissement**.

(c) Etant donné que X suit une loi continue, on a pour tout réel t : $P(X \leqslant t) = 1 - P(X \geqslant t)$. Ainsi

$$P(X \leqslant \mu) = P(X \geqslant \mu) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad P(X \geqslant \mu) = \frac{1}{2}$$

D'après ce qui précède :

$$P(X \geqslant \mu) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-a\mu} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -a\mu = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \frac{\ln 2}{a}$$

Ccl : La valeur cherchée est $\mu = \dfrac{\ln 2}{a}$, qui est la **médiane de la loi de** X.

On considère un vélo muni de deux pneus neufs et on note X_1 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation, jusqu'à sa première crevaison, du pneu avant et, de même, on note X_2 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation du pneu arrière jusqu'à sa première crevaison.

On suppose que les variables X_1 et X_2 suivent la même loi que X et que, pour tout couple (X_1, X_2) de réels, les événements $(X_1 \leqslant x_1)$ et $(X_2 \leqslant x_2)$ sont indépendants.

3. On note T la variable aléatoire égale à la durée d'utilisation du vélo avant que l'un ou l'autre des deux pneus ne crève.

(a) On a : $(T > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t)$.

(b) On remarque que $T(\Omega) = [0; +\infty[$ dont pour tout réel $t < 0$, on a $F_T(t) = 0$.
Pour tout réel $t \geqslant 0$, l'indépendance des variables X_1 et X_2 permet alors d'obtenir que :

$$\begin{aligned} P(T \leqslant t) &= 1 - P(T > t) = 1 - P((X_1 > t) \cap (X_2 > t)) = 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t) \\ &= 1 - e^{-at} \times e^{-at} = 1 - e^{-2at} \end{aligned}$$

Ccl : On observe que

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-2at} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

(c) La variable T ayant la fonction de répartition d'une variable exponentielle de paramètre $2a$ nous pouvons déduire que T suit donc la loi exponentielle de paramètre $2a$. Il vient alors que :

$$E(T) = \frac{1}{2a} \qquad V(T) = \frac{1}{(2a)^2} = \frac{1}{4a^2}$$

4. On suppose que le prix d'achat du vélo est égal à C_0 euros (où C_0 est un réel strictement positif) et que sa valeur marchande est une fonction C qui évolue au cours du temps, exprimé en années, suivant la formule :

$$C(t) = C_0 \exp(-at)$$

(a) La fonction C est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que composée de la fonction $t \to -at$ et de la fonction $u \to C_0 e^u$. Pour tout $t \geqslant 0$,

$$C'(t) = -aC_0 e^{-at} < 0$$

Ainsi, la fonction C est décroissante sur $[0, +\infty[$. On observe que $C(0) = C_0$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = 0$.

(b) Soit Y la variable aléatoire désignant la valeur marchande du vélo quand, pour la première fois, un de ses pneus crève.

i. D'après l'énoncé Y est la valeur marchande du vélo à l'instant T, instant de première crevaison d'un pneu, donc

$$Y = C(T) = C_0 exp(-aT) = C_0 e^{-aT}$$

ii. Etant donné le tableau de variations de la fonction C, la variable Y prend nécessairement une valeur dans l'intervalle $[0, C_0]$. Ainsi, automatiquement il vient que :

$$\mathbb{P}(Y \leqslant x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leqslant 0 \\ \\ 1 & si \quad x \geqslant C_0 \end{cases}$$

Il nous reste à travailler sur le cas où $x \in]0, C_0]$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(C_0 e^{-aT} \leqslant x) = \mathbb{P}\left(e^{-aT} \leqslant \frac{x}{C_0}\right) = \mathbb{P}\left(-aT \leqslant \ln\left(\frac{x}{C_0}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(T \geqslant \frac{-1}{a}\ln\left(\frac{x}{C_0}\right)\right) \end{aligned}$$

Remarquons que puisque $0 < x \leqslant C_0$, on a $\dfrac{x}{C_0} \in]0, 1]$ et ainsi $\ln\left(\dfrac{x}{C_0}\right) \leqslant 0$ donc

$$\frac{-1}{a}\ln\left(\frac{x}{C_0}\right) \geqslant 0$$

Or puisque T suit la loi exponentielle de paramètre $2a$, il vient que pour tout $u \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(T \geqslant u) = 1 - \mathbb{P}(T \leqslant u) = 1 - (1 - e^{-2au}) = e^{-2au}$$

Nous pouvons donc déduire que pour tout $x \in]0, C_0]$,

$$G(x) = e^{-2a \times \frac{-1}{a}\ln\left(\frac{x}{C_0}\right)} = e^{2\ln\left(\frac{x}{C_0}\right)} = e^{\ln\left(\left(\frac{x}{C_0}\right)^2\right)} = \left(\frac{x}{C_0}\right)^2$$

<u>Ccl</u> : La fonction de répartition de la variable Y est donnée par :

$$\begin{cases} G(y) = 0 & \text{si} & y \leqslant 0 \\ G(y) = \left(\dfrac{y}{C_0}\right)^2 & \text{si} & 0 < y \leqslant C_0 \\ G(y) = 1 & \text{si} & C_0 < y \end{cases}$$

iii. La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. Une densité g de la variable Y est donnée sur $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ par

$$g(x) = G'(x) = \begin{cases} 0 & six < 0 \\ \dfrac{2x}{C_0^2} & si \quad x \in]0, C_0[\\ 0 & si \quad x \geqslant C_0 \end{cases}$$

<u>Ccl</u> : Il vient que la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{C_0^2} & si \quad x \in]0, C_0[\\ 0 & sinon \end{cases}$ est une densité de probabilité de la variable Y

iv. • **Calcul de l'espérance de Y.**
On a

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\, dx = \int_0^{C_0} x \times \frac{2x}{C_0^2}\, dx = \frac{2}{C_0^2}\int_0^{C_0} x^2\, dx \\ E(Y) &= \frac{2}{C_0^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{C_0} = \frac{2}{C_0^2} \times \frac{C_0^3}{3} = \frac{2C_0}{3} \end{aligned}$$

• **Calcul de la variance de Y.**
LE moment d'ordre 2 de la variable Y est

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\, dx = \int_0^{C_0} x \times \frac{2x^2}{C_0^2}\, dx = \frac{2}{C_0^2}\int_0^{C_0} x^3\, dx \\ E(Y) &= \frac{2}{C_0^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{C_0} = \frac{2}{C_0^2} \times \frac{C_0^4}{4} = \frac{C_0^2}{2} \end{aligned}$$

Il vient dès lors que :

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{C_0^2}{2} - \left(\frac{2C_0}{3}\right)^2 = C_0^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{C_0^2}{18}$$

v. En supposant que le coût de la réparation d'un pneu, quand il crève, est de $\dfrac{C_0}{50}$ euros, ce coût sera supérieur ou égal au dixième de la valeur marchande du vélo quand le premier de ses pneus crève si et seulement si

$$\frac{C_0}{50} \geqslant \frac{Y}{10}$$

soit dès que

$$Y \leqslant \frac{C_0}{5}$$

<u>Ccl</u> : Ainsi la probabilité cherchée vaut :

$$\mathbb{P}\left(Y \leqslant \frac{C_0}{5}\right) = G\left(\frac{C_0}{5}\right) = \left(\frac{\frac{C_0}{5}}{C_0}\right)^2 = \frac{1}{25}$$