MATRICES et APPLICATIONS LINEAIRES

1 Représentation(s) matricielle(s) d'une A.L.

1.1 Matrices d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies ($dim(E) = n$ et $dim(F) = p$) et $f \in \mathcal{L}(E\,,\,F)$.
Soit $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e}_1\,,\,\overrightarrow{e}_2\,,\,\dots\,,\,\overrightarrow{e}_n\}$ une base de l'espace vectoriel E.
Soit $\mathcal{B}_F = \left\{\overrightarrow{f}_1\,,\,\overrightarrow{f}_2\,,\,\dots\,,\,\overrightarrow{f}_p\right\}$ une base de l'espace vectoriel F.
Pour $j \in \{1\ ;\ \dots\ ;\ n\}$, le vecteur $f(\overrightarrow{e}_j) \in F$ donc admet une décomposition unique dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$f(e_j) = a_{1,j}\overrightarrow{f}_1\ +\ a_{2,j}\overrightarrow{f}_2\ +\ \dots\ +\ a_{p,j}\overrightarrow{f}_p$$

☛ Les coefficients $a_{1,j}\,,\dots\,,\,a_{p,j}$ sont les coefficients de décomposition du vecteur $f(\overrightarrow{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Définition.

On appelle **matrice de l'application linéaire f relative aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, la matrice noté** $M_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}$ définie par

$$Mat_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f)\ =\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots\dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots\dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots\dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

✖ **ATTENTION** : $Mat_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f)\ \in\ \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$
✖ Ainsi la j-ème colonne de cette matrice contient les coefficients de décomposition de $f(\overrightarrow{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
✖ Si f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ est une base de E on note simplement

$$Mat_{\mathcal{B}}(f)\ =\ Mat_{\mathcal{B}\,;\,\mathcal{B}}(f)$$

`Une application linéaire` f `de` E `dans` F `est entièrement caractérisée par la donnée de cette matrice : connaissant la matrice` $M_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f)$ `nous pourrons déterminer` $f(\overrightarrow{x})$ `quelque soit` $\overrightarrow{x} \in E$ `(voir partie 4.2)`

Exemple : Soit l'application

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \to & (2x+y\ ;\ -x-y-z\ ;\ 2y\ ;\ x-z) \end{array}$$

L'application f est une application linéaire. Soient $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_4$ les bases canoniques des espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
Alors la matrice $M_{\mathcal{B}_3\,;\,\mathcal{B}_4}(f) \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et

$$M_{\mathcal{B}_3\,;\,\mathcal{B}_4}(f)\ =\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.
1. Soit $\mathcal{B}'_2 = ((1,1)\ ;\ (1,2))$ et $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit l'application f par

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \to & (2x-y\ ;\ 7x+3y\ ;\ -2y) \end{array}$$

Déterminer $Mat_{\mathcal{B}'_2,\mathcal{B}_3}(f)$.
2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application g par $g(M) = 5M\ -\ {}^tM$.
(a) Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
(b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Définition (Matrices représentant une application linéaire)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une base de E, notée $\mathcal{B}$, et une base de F, notée $\mathcal{B}'$ telles que

$$A = Mat_{\mathcal{B}\,;\,\mathcal{B}'}(f)$$

on dit que la **matrice** A **représente l'application linéaire** f.
☛ Une application linéaire peut être représentée par plusieurs voire une infinité de matrices différentes.

Exercice 2 - Vrai ou Faux (Justifier)

1. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente l'application linéaire f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;\,y\,;\,z) & \to & (x-y+z\,;\,2z-y) \end{array}$.
2. L'endomorphisme $id_{\mathbb{R}^2}$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;\,y) & \to & (x\,;\,y) \end{array}$ n'est représenté que par une seule matrice.
3. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ représente l'endomorphisme f :: $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \to & {}^tM \end{array}$

1.2 Calcul matriciel et image d'une vecteur par f à partir de $M_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f)$

Propriétés.

Soit $\overrightarrow{x} \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne représentant le vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}_E$
On sait que $f(\overrightarrow{x}) \in F$, on note Y le vecteur colonne représentant $f(\overrightarrow{x})$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
On a alors :

$$Y \;=\; M_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f)\;.\;X$$

Exemple :
Soient les espaces vectoriels $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$. On a $dim(E) = 4$ et $dim(F) = 3$.
Considérons $\mathcal{B}_E = \{1\,;\,X\,;\,X^2\,;\,X^3\}$ et $\mathcal{B}_F = \{1\,;\,X\,;\,X^2\}$, les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit f l'endomorphisme tel que

$$M_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $\overrightarrow{P} = P = X^3 + X^2 + 2 \in \mathbb{R}_3[X]$. Nous cherchons à déterminer le polynôme $f(P) \in F$.

La matrice colonne représentant le vecteur P dans la base $\mathcal{B}_E$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi le polynôme $f(P)$ a pour matrice de décomposition dans $\mathcal{B}_F$, la matrice :

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire $f(P)$ est le polynôme :

$$f(P) = 5 \cdot 1 + (-7) \cdot X + 0 \cdot X^2 = -7X + 5$$

Exercice 3.
Soient la famille $((1,1)\ ;\ (1,2))$.
(a) Montrer que $((1,1)\ ;\ (1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On la note désormais $\mathcal{B}'_2$.
Soit $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(b) Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$Mat_{\mathcal{B}'_2\ ;\ \mathcal{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ les coordonnées de $g((2,3))\ ;\ g((-1,1))$.
Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ les coordonnées de $g((x,y))$ en fonction de x, y.
(c) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$Mat_{\mathcal{B}_3\ ;\ \mathcal{B}'_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ les coordonnées de $f((2,3,0))\ ;\ f((-1,1,1))$.
Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ les coordonnées de $f((x,y,z))$ en fonction de x, y et z.

Exercice 4.
Soit $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Déterminer l'ensemble des vecteurs $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $f((x;y)) = (x;y)$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $f((x;y)) = 2\cdot(x;y)$.
3. Etablir selon la valeur du réel λ, l'ensemble des couples de réels $(x;y)$ tels que $f((x;y)) = \lambda\cdot(x;y)$.

2 Liens entre matrices et applications linéaires

2.1 Isomorphismes entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

Propriétés (Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$)**.**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $dim(E) = n$ et $dim(F) = p$ et $f \in \mathcal{L}(E\,,\,F)$.
Si $\mathcal{B}_E$ est une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F fixées, alors l'application

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ f & \to & Mat_{\mathcal{B}_E\ ;\ \mathcal{B}_F}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme.

❶ ***Linéarité de*** φ *: Si* $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\begin{array}{rcl} Mat_{\mathcal{B}_E\ ;\ \mathcal{B}_F}(f+g) & = & Mat_{\mathcal{B}_E\ ;\ \mathcal{B}_F}(f)\ +\ Mat_{\mathcal{B}_E\ ;\ \mathcal{B}_F}(g) \\ Mat_{\mathcal{B}_E\ ;\ \mathcal{B}_F}(\lambda\cdot f) & = & \lambda.Mat_{\mathcal{B}_E\ ;\ \mathcal{B}_F}(f) \end{array}$$

❷ ***Injectivité de*** φ *: Si* f *et* $g \in \mathcal{L}(E,F)$ *telles que* $Mat_{\mathcal{B}_E\ ;\ \mathcal{B}_F}(f) = Mat_{\mathcal{B}_E\ ;\ \mathcal{B}_F}(g)$ *alors* $f = g$
Si deux applications linéaires sont représentées par une même matrice dans deux bases données alors ces applications linéaires sont égales!!
❸ ***Surjectivité de*** φ *: Toute matrice* A *de* n *colonnes et* p *lignes représente une application linéaire* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *par rapport aux bases* $\mathcal{B}_E$ *et* $\mathcal{B}_F$*.*

☛ On déduit notamment que $Dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$ et $Dim(\mathcal{L}(E) = n^2$.

2.2 Application linéaire canoniquement associé à une matrice.

Soit deux entiers non nuls n et p et une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
Considérons les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ et leur bases canoniques, respectivement $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$.
Nous venons de voir que l'application :

$$\varphi :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ f & \to & Mat_{\mathcal{B}_n\ ;\ \mathcal{B}_p}(f) \end{array}$$

est bijective. Ainsi, A possède un unique antécédent par φ, noté f_A!!

Propriété - Définition.

Il existe un unique application linéaire $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que

$$Mat_{\mathcal{B}_n\,;\,\mathcal{B}_p}(f_A) = A$$

c'est à dire représenté par A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$
Cette application linéaire f_A est appelée **application linéaire canoniquement associée à** A.

Lorsque $n = p$, c'est à dire si A est un matrice carrée, on parle alors d'**endomorphisme canoniquement associé à** A.

Exercice 5. Déterminer les applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Matrice d'une composée d'applications linéaires

Propriétés.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies et de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, nous savons que $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
En notant $A = Mat_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}_F\,;\,\mathcal{B}_G}(g)$ on a alors que :

$$Mat_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_G}(g \circ f) \;=\; B\ A$$

En conséquence, si $f \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphisme de E) et $\mathcal{B}_E$ une base de E, alors si $A = Mat_{\mathcal{B}_E}(f)$, quelque soit l'entier naturel k, on observe que :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}(f^k) = A^k$$

3 Applications linéaires bijectives

Propriétés.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $dim(E) = dim(F) = n$ et f une application linéaire de E vers F. Notons alors $\mathcal{B}_E$, une base de E et $\mathcal{B}_F$, une base de F. On a alors que :

f est un isomorphisme de E vers F si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f)$ est une matrice inversible

Si tel est le cas :

$$Mat_{\mathcal{B}_F\,;\,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) \;=\; [Mat_{\mathcal{B}_E\,;\,\mathcal{B}_F}(f)]^{-1}$$

Exercice 6.
Déterminer si les applications linéaires suivantes sont bijectives. Si oui déterminer la matrice de leur application réciproque relativement aux bases canoniques des espaces considérés.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & XP' \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \to & (2x; x - y; x + z) \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \to & (2x - 4y; -x + 2y) \end{array}$$

4 Etude matricielle du noyau et de l'image d'une application linéaire

4.1 Etude du noyau d'une AL f à partir d'une matrice réprésentant f

4.1.1 Noyau d'une matrice.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p et admettant pour base respectivement $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et sa représentation matricielle vis à vis de ces deux bases notée

$$A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} \ \in \ \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

A chaque vecteur x de E, on note $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_E$. On a alors

$$x \in Ker(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad AX = 0_{p,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Définition (noyau d'une matrice).

Par abus de langage, on appelle **noyau de la matrice** A l'ensemble, noté $\mathbf{Ker(A)}$, des matrices colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$ telles que : $\quad AX = 0_{p,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.1.2 Méthode : Comment savoir si une AL est injective ou pas ?

La question généralement posée au sujet d'une AL $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est : est-elle injective? Or nous avons déjà observé que cette question se ramène à savoir si le noyau de l'application lineaire f est réduit au vecteur nul. Cela amène naturellement à déterminer les vecteurs $\overrightarrow{u} \in E$ tels que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}_F$.

`Contexte` : Supposons que f ne soit définie qu'à partir d'une matrice A la représentant vis à vis de deux bases (respectivement de E et de F).

`Méthode générale` : Afin de savoir si f est injective ou non, nous allons étudier $Ker(A)$, le noyau de la matrice A, donc chercher les matrices colonnes X telles que $A.X = 0_{p,1}$ (matrice colonne nulle) .

`Méthode astucieuse` : En observant les colonnes de la matrices représentant l'application linéaire f, il est parfois possible obtenir <u>sans calcul</u> des vecteurs non nuls appartenant au noyau $Ker(f)$!!

Exercice 7.
Parmi les applications linéaires représentées (les bases ne sont pas précisées) ci-dessous lesquelles sont injectives?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Etude de l'image d'une AL f à partir d'une matrice réprésentant f

4.2.1 Rang d'une matrice.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p et admettant pour base respectivement $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F$. Notons également $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et sa représentation matricielle vis à vis de ces deux bases notée

$$A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \ldots\ldots & X_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

On sait que

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

or les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sont représentés par les colonnes de la matrice A, notées $X_1, \dots, X_n$, éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$rg(f) = Dim(\ Vect(X_1, \dots, X_n)\ )$$

Définition (Rang d'une matrice)**.**

Par abus de langage, on parle de **rang de la matrice** A pour désigner la dimension de l'espace

$$Vect(\ (X_1, \dots, X_n\ )$$

✖ Le rang d'une matrice carrée A est donc égal au rang de n'importe quelle application linéaire f représentée par la matrice A.

Propriétés (rang de la transposée d'une matrice)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ alors :

$$rg(A) = rg(^tA)$$

Exercice 8.
Déterminer le rang des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ représentés par les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Méthode : Comment savoir si une AL est surjective ou pas ?

`Contexte` : Supposons que f ne soit définie qu'à partir d'une matrice A la représentant vis à vis de deux bases (respectivement de E et de F).

`Méthode générale` : Afin de savoir si f est sujective ou non, nous allons étudier le rang de la matrice A (ou de f), $rg(A) = Dim(\ Vect(X_1, \dots, X_n)\ )$. Pour cela on cherche à savoir si la famille des colonnes de la matrice A forme une famille libre ou pas. Si tel n'est pas le cas, on explicite un ou plusieurs liens entre ces matrices colonnes jusqu'à obtenir une famille extraite de $(X_1, \dots, X_n)$ qui formera une base de $Vect(X_1, \dots, X_n)$.

4.3 Critères d'inversibilité d'une matrice carré

Conséquences - Propriétés (Critères d'inversibilité/non inversibilité d'une matrice carrée)**.**

❶ Toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes forment une famille libre est inversible. Tout endomorphisme représenté par A est bijectif.

❷ Toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant une colonne nulle n'est pas inversible. Tout endomorphisme représenté par A est n'est pas bijectif.

❸ Toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant deux colonnes proportionnelles n'est pas inversible. Tout endomorphisme représenté par A est n'est pas bijectif.

☛ Une matrice et sa transposée étant toutes deux inversibles ou toutes deux non-inversibles, ces critères sont également valables en modifiant le mot "colonne" par le mot "ligne".

5 Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Propriétés (Formules de changement de bases).

Soient $\mathcal{B}_{E1}$ et $\mathcal{B}_{E2}$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie $Dim(E) = n$ et $\mathcal{B}_{F1}$ et $\mathcal{B}_{F2}$ deux bases d'un espace vectoriel F de dimension finie $Dim(F) = p$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E\ ;\ F)$.
On note alors :

$A = Mat_{\mathcal{B}_{E1}\ ;\ \mathcal{B}_{F1}}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_{E1}$ (au départ) et $\mathcal{B}_{F1}$ (à l'arrivée);
$B = Mat_{\mathcal{B}_{E2}\ ;\ \mathcal{B}_{F2}}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_{E2}$ (au départ) et $\mathcal{B}_{F2}$ (à l'arrivée)
$P = Mat_{\mathcal{B}_{E1} \to \mathcal{B}_{E2}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_{E1}$ à $\mathcal{B}_{E2}$
$Q = Mat_{\mathcal{B}_{F1} \to \mathcal{B}_{F2}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_{F1}$ à $\mathcal{B}_{F2}$. lors on a la relation :

$$B = Q^{-1}AP$$

Exercice 9.
On note $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer que $\mathcal{B}'_2 = (\ (1,1); (1,2)\ )$ et $\mathcal{B}'_3 = (\ (1,1,0); (0,1,2); (1,1,1)\ )$ sont des bases respec. de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'application linéaire canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer

$$B = Mat_{\mathcal{B}'_2\ ;\ \mathcal{B}'_3}(f) \qquad C = Mat_{\mathcal{B}_2\ ;\ \mathcal{B}'_3}(f) \qquad D = Mat_{\mathcal{B}'_2\ ;\ \mathcal{B}_3}(f)$$

Cas particulier des endomorphismes

Soit E une espace vectoriel de dimension finie, notée $n \in \mathbb{N}$ et f un endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$).
Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1\ ;\ \overrightarrow{e}_2\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ \overrightarrow{e}_n\}$ une base de E.

On appelle **matrice de l'endomorphisme f relative à la base $\mathcal{B}$, la matrice carré** $M_{\mathcal{B}\ ;\ \mathcal{B}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriétés (Formules de changement de Bases - Cas endomorphisme).

Soient $\mathcal{B}_{E1}$ et $\mathcal{B}_{E2}$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie $Dim(E) = n$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On note alors :

$A = Mat_{\mathcal{B}_{E1}}(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_{E1}$;
$B = Mat_{\mathcal{B}_{E2}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_{E2}$
$P = Mat_{\mathcal{B}_{E1} \to \mathcal{B}_{E2}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_{E1}$ à $\mathcal{B}_{E2}$

On a alors :

$$B = P^{-1}AP$$

`Cette formule est à l'origine de la méthode de réduction des endomorphismes/ des matrices. L'idée étant de déterminer une base, dite "adaptée",` $\mathcal{B}_{E2}$ `de` E `de sorte à ce que` $Mat_{\mathcal{B}_{E2}}(f)$ `soit le plus "vide" possible, c'est à dire dont l'écriture soit le plus proche d'une matrice diagonale.`

Exercice 10.
On note $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer $\mathcal{B}'_3 = (\ (-1,1,0); (-1,0,1); (1,1,1)\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'application linéaire canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice $B = Mat_{\mathcal{B}'_3}(f)$.